

Eine „Pflanzschule für Privatdozenten“ – ein Ziel Felix Kleins

Zum 175. Geburtstag des Mathematikers

Renate Tobies (Jena)

Im August 1880 schrieb Felix Klein aus München an Wilhelm Fiedler (1832-1912), der durch die von ihm bearbeitete Übersetzung der Lehrbücher der Analytischen, Projektiven und Algebraischen Geometrie des Iren George Salmon (1819-1904) bekannt wurde. Darin integrierte er die neuesten Ergebnisse von Clebsch, Cremona, Klein u.a. und pflegte eine lebhafte Korrespondenz.¹ Klein informierte Fiedler, dass er nach Leipzig wechseln wird und dass er Leipzig gern zu einer „Pflanzschule“ für Privatdozenten machen möchte.

Im Beitrag wird gezeigt, wie Klein diesen Drang, junge Mathematiker auf den Weg zu bringen, nicht nur in Leipzig realisierte, wo er acht Personen zu habilitationsreifen Ergebnissen lenkte. Klein setzte das in Göttingen fort. Seine Fähigkeit, Begabungen schnell zu erkennen, führte dazu, dass er kreative Forscher zur Habilitation aufforderte, darunter Heinrich Burkhardt, Ernst Ritter, Georg Bohlmann, Arnold Sommerfeld, Constantin Carathéodory, Paul Koebe, Theodor Kármán, Conrad Heinrich Müller, Rudolf Schimmack. Auch Emmy Noether gehört in diese Reihe. Das wird im Überblick erläutert. Einige Beispiele werden anhand neuer Akteneinsicht näher erörtert.

Aurel Voß verfasste seine Habilitationsschrift bei Klein in Erlangen

Aurel Voß (1845-1931), fast vier Jahre älter als Klein, weilte im WS 1872/73 bei Klein in Erlangen und war ihm lebenslang dankbar für den geebneten Weg zur Habilitation. Voß zeichnete ein eindringliches Bild des jungen Klein, des „jugendlichen Dozenten“, im Alter von 23 als ordentlicher Professor an die Universität Erlangen berufen. Voss betonte Kleins „ungewöhnliche Vielseitigkeit seiner Begabung, sein *divinatorisches* wissenschaftliches Taktgefühl, die Originalität seiner Konzeptionen“ und bezeichnete es als Glück, vier Monate lang fast täglich mit Klein verkehren und an seinem Beispiel lernen zu dürfen. Er überlieferte Kleins „[...] merkwürdige Fähigkeit, überall in den Untersuchungen anderer gerade *den* Punkt zu entdecken, der mit seinen eigenen Gedanken in Verbindung stand“ sowie dessen „[...] Gabe, jeden seiner Schüler auf das Thema hinzuweisen, das dessen besonderer Begabung und Entwicklung entsprach.“² So erarbeitete Voß im Austausch mit Klein seine Habilitationsschrift „Zur Theorie der windschiefen Flächen“³, die an Ergebnisse Plückers und Kleins im Gebiet der Liniengeometrie anknüpfte. Klein gewann Moritz Abraham Stern (1807-1894) dafür, dass sich Voss 1873 in Göttingen habilitieren konnte.⁴

Von den sechs Schülern, die Klein in Erlangen zur Doktorwürde führte, erreichten vier eine Hochschullaufbahn, darunter der Schweizer Adolf Weiler in Zürich. Drei (F. Lindemann, A. Harnack, L. Wedekind) kamen zunächst mit zu Klein nach München.

Von Klein angeregte Habilitationen während seiner Zeit in München

Da am Münchener Polytechnikum sowie auch an der Universität eine Habilitation für einen Klein-Schüler nicht möglich war, ebnete Klein die Wege an andere Orten: für *Axel Harnack* (1851-1888) 1876 an der Universität Leipzig, wohin Klein durch seine Tätigkeit für die *Math. Ann.* sehr gute Beziehungen besaß. Den älteren *Ludwig Wedekind* (1843-1908) empfahl Klein nach Karlsruhe, wo der Clebsch-Schüler Jacob Lüroth (1844-1910) unterstützte. Wedekind

1 Vgl. die Korrespondenz in CONFALIONIERI et. al 2019.

2 VOSS 1919: 286. (divinatorisch = vorahnend, seherisch).

3 Publiziert in *Math. Ann.* 8 (1874) 1: 54–135.

4 Klein bedankte sich bei Moritz A. Stern, dass er seine Bitte betr. Habilitation von Aurel Voss in Göttingen erfüllt habe. [UBG] Cod. Ms. F. Klein 11: 1160A (Klein an Stern, 26.7.1874).

habilitierte sich 1876 dort am Polytechnikum mit der Arbeit *Studien im binären Werthgebiet*.⁵ *Ferdinand Lindemann* (1852-1939) habilitierte sich 1877 an der Universität Würzburg, wo Klein guten Kontakt zu Friedrich Prym (1841-1915) besaß, der noch selbst bei Bernhard Riemann (1826-1866) gehört hatte.

Kleins Schüler *Karl Rohn* (1855-1920) erwarb 1878 mit einer von Klein betreuten Arbeit den Dokortitel an der Universität München⁶ (das Polytechnikum, TH seit 1877, erhielt erst 1901 das Promotionsrecht) und verfasste kurz darauf auch seine Habilitationsschrift, das Themenfeld der Dissertation fortsetzend.⁷ Aus Kleins Korrespondenz mit Adolph Mayer (1839-1908) geht hervor, dass Klein schon seit Juli 1878 vorbereitete (bevor die Habilitationsschrift fertig ausgearbeitet war), dass Rohn in Leipzig Privatdozent werden kann (1879).⁸

Kleins Ziel: Eine „Pflanzschule für Privatdocenten“ an der Universität Leipzig

Kleins Ziel, junge Leute zu fördern, sie zu eigener kreativer Arbeit zu bringen, bezog sich nicht nur auf seine eigenen Schüler. Er wollte bewusst auch andere mathematisch begabte Personen nach der Promotion weiter lenken. Das entnehmen wir Kleins eingangs erwähntem Brief vom 17. August 1880 an Wilhelm Fiedler, der – aus Chemnitz in Sachsen stammend – seit 1867 Professor am Polytechnikum in Zürich war:

Bereits seit 1 ½ Jahren ist ein Schüler von mir, Hr. Dr. Rohn, in Leipzig als Geometer habilitiert. Ich höre jetzt, dass auch Hr. Dr. Schur⁹ [synth. Geom., R.To] an eine Habilitation in Leipzig denkt. Sollten Sie jemand haben, der Kraft und Energie genug besitzt, um sich an einem Orte niederzulassen, an welchem er nicht vorwärts kommen, sondern von welchem er weggerufen sein will, so schicken Sie ihn mir auch zu. Ich möchte, wenn es angeht, Leipzig zu einer Art von Pflanzschule für Privatdocenten machen: zum Nutzen der jungen Leute und vielleicht der Wissenschaft [...].¹⁰

Wie Klein die Habilitationsschriften folgender Personen förderte bzw. beurteilte, ist hinreichend beschrieben (vgl. TOBIES 2019: 206–17; TOBIES 2021: 232–43). Einige mussten aus formalen Gründen das Verfahren an anderen Orten realisieren (die Philosophische Fakultät der Universität Leipzig setzte altsprachliche Ausbildung, erworben mit dem Abitur an einem Humanistischen Gymnasium, voraus), wohin Klein auch die Wege ebnete.

Friedrich Schur	(Leipzig)	Otto Hölder	(→Göttingen)
Walther Dyck	(Leipzig)	Hermann Wiener	(→Halle)
Adolf Hurwitz	(→Göttingen)	Friedrich Engel	(Leipzig)
Otto Staude	(→Breslau)	Eduard Study	(Leipzig)
Adolf Krazer	(→Würzburg)		

Für Kleins Leipziger Zeit sind zudem *Georg Pick* (1859–1942) und *David Hilbert* (1862–1943) notwendig zu nennen.

Pick kam als Prager Privatdozenten im Herbst 1883 für zwei Semester zu Klein, wo ihm erst *über die Mathematik die Augen aufgegangen seien*, wie er selbst urteilte. Klein bezog

5 <https://digital.blb-karlsruhe.de/blbihd/content/structure/7126348> (51 S. plus Illustrationen). Wedekind führte in seiner Habilitationsschrift fort, was er mit der Dissertation („Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen“. *Math. Ann.* 9 (1875) 209–17) begonnen hatte: er nutzte Kleins Übertragungsprinzip, die geometrische Interpretation von $x+iy$ auf der Kugelfläche (Riemannsche Zahlenkugel) für die Theorie der binären Formen; seine Arbeiten halfen, Kleins Ikosaedertheorie vorzubereiten.

6 <https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=7410&lang=en>

7 Rohn, K. (1879). „Transformation der hyperelliptischen Functionen $p=2$ und ihre Bedeutung für die Kummer’sche Fläche“ (Habilitationsschrift). *Math. Ann.* 15: 315–54 (datiert Leipzig, Mai 1879). – Klein knüpfte daran später noch eigene Arbeiten an, wie er selbst angab, vgl. KLEIN 1921 (GMA I): 52.

8 TOBIES/ROWE 1990: 100–02, 104–05.

9 Friedrich Schur (1856-1932) hatte in Breslau studiert und bei E.E. Kummer in Berlin promoviert, bevor er sich 1881 in Leipzig habilitierte. Klein verfasste das Gutachten zu Schurs Arbeit, förderte ihn und wählte ihn auch als seinen Assistenten (in der Nachfolge von W. Dyck).

10 CONFALIONIERI et. al 2019: 112.

Pick in seine Forschungen zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen ein, inspirierte ihn zu neuen Ergebnissen und förderte seine Karriere bis zur Professur in Prag.¹¹

Auch das spätere Verhältnis von *Hilbert* und Klein kann nur richtig verstanden werden, wenn uns bewusst ist, dass Hilbert wissenschaftlicher Enkel Kleins war. Er kam im Herbst 1885 zu Klein, nach Promotion beim Klein-Schüler Lindemann an der Universität Königsberg.¹² Dort hatte Hilbert insbesondere im Austausch mit Extraordinarius Hurwitz (Kleins Schüler) ein breites Wissen erlangt. Dies umfasste die Kenntnisse der „einander sich so vortrefflich ergänzenden Schulen, der geometrischen Schule von Klein und der algebraisch-analytischen Berliner Schule“, wie Hilbert es selbst ausdrückte.¹³ Von Hurwitz erfuhr Klein über Hilbert, nachdem sein Ikosaederbuch (1884) in Königsberg eingetroffen war:

Nehmen Sie meinen herzlichsten Dank für Ihr Buch, welches mich auf meinen Reisen begleitet und dessen Studium mir den größten Genuß bereitet. Hier sind zwei unserer besten Studenten aus Königsberg, welche ich gleich mit Ihrem Buch bekannt gemacht habe. Der eine von ihnen, Herr Hilbert, hat gerade seine Dissertation „Über Kugelfunctionen vom Standpuncte der Invariantentheorie betrachtet“ vollendet; derselbe ist ein ganz wüthender Invarianten-Mensch, er hat die Absicht nach dem Doctorexamen auf ein Jahr nach Leipzig zu gehen um Ihre Anregung zu genießen; er ist ein hitziger, speculativer Kopf und wird Ihnen als solcher gewiß gut gefallen.¹⁴

Klein veranlasste Hilbert zunächst, die Resultate seiner Dissertation für einen Artikel zusammenzufassen.¹⁵ Kurz darauf fand Hilbert neue Ergebnisse zum Gebiet der binären Invariantentheorie, die Klein in der Sitzung vom 7. Dezember 1885 bei der *Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften* vorlegte.¹⁶ Diese Arbeit wird als vorläufige Präsentation von Ergebnissen seiner Habilitationsschrift bewertet, die er im Juni 1886 in Königsberg einreichte.¹⁷ Klein sah hier u.a. eines seiner Ziele fortgesetzt – mit dem *Erlanger Programm* proklamiert – Invarianten und Kovarianten bekannter Gruppen systematisch zu untersuchen.

Klein lud Pick und Hilbert zur Silvesterfeier am 31.12.1885 nach Hause ein, stimmte mit Pick die weitere Kooperation zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen ab und empfahl Hilbert, eine Studienreise nach Paris anzuschließen.

Hilbert trug zweimal in Kleins Seminar vor, am 11. Januar 1886 „Ueber die Integrale erster Gattung auf algebraischen Flächen“, ein Referat über eine Arbeit von Picard aus dem *Journal de Mathematiques pures et appliquees* 1885 ([Protokolle] Bd. 7: 218–25), was die Paris-Reise vorbereiten konnte. Im zweiten Vortrag analysierte Hilbert Arbeiten von Riemann, Weierstraß, Poincaré, Picard und Frobenius unter dem Titel „Ueber periodische Functionen zweier Variabler“ (am 15.2.1886, [Protokolle] Bd. 7: 274–83). Mit Kleins Empfehlungsschreiben reiste Hilbert im März 1886 nach Paris. Seitdem existiert eine regelmäßige Korrespondenz, die ediert vorliegt.¹⁸ Hilbert folgte Kleins Angebot, ihm seine neuen Ergeb-

11 Vgl. detailliert TOBIES 2023.

12 Hilbert, David (1885). *Über invariante Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen* (Dissertation, 33 S.). Königsberg.

13 Hilbert, D. (1921). „Adolf Hurwitz“. *Math. Ann.* 83: 161–72, Zitat 162.

14 [UBG] Cod. Ms. F. Klein 9: 968 (Hurwitz an Klein, 4.8.1884).

15 Hilbert, D. (1886). „Ueber die notwendigen und hinreichenden kovarianten Bedingungen für die Darstellbarkeit einer binären Form als vollständiger Potenz“ (datiert Nov. 1885). *Math. Ann.* 27: 158–61. (Hilbert 1933 GMA II).

16 Hilbert, David (1885). „Ueber eine allgemeine Gattung irrationaler Invarianten und Covarianten für eine binäre Grundform geraden Grades“. *Berichte der math.-phys. Classe der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften* 37: 427–38.

17 Hilbert, David (1887). „Ueber einen allgemeinen Gesichtspunt für invariantentheoretische Untersuchungen im binären Formengebiete“. *Math. Ann.* 28 (3): 381–446.

18 FREI 1985 ist eine gute Quelle. Nur die biographischen Angaben sind leider z.T. fehlerhaft: so kam Klein z.B. nicht auf Betreiben von H.A. Schwarz nach Göttingen (S. 5, Fußnote 1), sondern gegen Schwarz' Wunsch. H.A. Schwarz und auch der zweite Mathematik-Ordinarius Schering verfassten ein Separatvoten gegen die Liste der Fakultätsmehrheit, die Klein an erste Stelle gesetzt hatte. (Vgl. TOBIES 2019: 500–504)

nisse für die *Math. Ann.* zu senden. Klein erkannte in Hilbert „the raising man“¹⁹ und konnte ihn schließlich zum 1. April 1895 als Professor neben sich gewinnen (nach erstem, nicht erfolgreichem Anlauf 1892).

Weitere Förderung von Privatdozenten an der Universität Göttingen

Als Klein zum 1. April 1886 nach Göttingen kam, traf er dort auf zwei Privatdozenten, Otto Hölder, den er bereits in Leipzig inspiriert hatte, sowie *Arthur Schoenflies* (1853-1928), der Klein einen maßgeblichen Hinweis verdankt, um die Symmetrien von Kristallstrukturen mittels Gruppentheorie zu erfassen.²⁰ Klein kämpfte um ein Extraordinariat für den (aus jüdischem Elternhaus stammenden) Schoenflies. Klein war damit erst erfolgreich, nachdem er 1892 einen Ruf an die Universität München abgelehnt hatte (vgl. TOBIES 2019: 317; 338–39).

Heinrich Burkhardt (1861-1914) war erneut ein wissenschaftlicher Klein-Enkel. Er hatte seine Dissertation „Beziehungen zwischen der Invariantentheorie und der Theorie algebraischer Integrale und ihrer Umkehrungen“ an der TH München erarbeitet, angeregt durch Aurel Voß. Bei Voß bedankte sich Burkhardt eingangs in seiner Dissertation, die er im Juli 1886 an der Universität einreichte.²¹ Voß und Walther Dyck empfahlen Burkhardt, seine Karriere bei Klein fortzusetzen.²² Klein bezog Burkhardt sofort in seine aktuellen Forschungen zu hyperelliptischen Modulfunktionen ein, sodass sich dieser bereits 1889 habilitieren konnte.²³

Ernst Ritter (1867-1895) ist der einzige Schüler Kleins, dem er selbst einen Nachruf widmete. In Waltershausen (heute Thüringen) geboren, hatte Ritter zwei Jahre in Jena studiert und danach in Göttingen, wo er im Herbst 1890 das Lehramtsexamen und im Frühjahr 1891 das Dokorexamen (bei Klein) absolvierte.²⁴ Klein hatte Ritter in seine Forschungen zu automorphen Funktionen integriert, wozu dieser auch während der folgenden Zeit im Referendar- und Probejahr in Kontakt mit Klein fortsetzte. Klein gewann ihn für seine Assistentenstelle; und im Sommer 1894 erfolgte die Habilitation.²⁵ Zum Oktober 1894 wurde Ritter – gemäß Kleins Antrag – ein Privatdozentenstipendium erteilt. John Henry Tanner (1861–1940), 1894 an der Cornell University (Ithaca, USA) zum Assistant Professor ernannt, kam im Herbst 1894 zu Studien nach Göttingen und veranlasste, dass Ritter 1895 ein Assistant Professorship an seiner Universität erhielt.²⁶ Leider erkrankte Ritter bei der Überfahrt mit dem Schiff an Typhus und verstarb in einem New Yorker Krankenhaus.

Klein bescheinigte Ritter „eine functionentheoretische Grundlegung“ der Theorie der automorphen Funktionen und betonte

19 Klein in einem Brief an Friedrich Althoff (preuß. Kultusministerium), zuerst zitiert in TOBIES 1987: 49.

20 Schoenflies, A. (1891). *Krystallsysteme und Krystallstruktur*. Leipzig: B.G. Teubner, bes. S. 622.

21 Publiziert München: Akademische Buchdruckerei F. Straub, 1887.

22 Liebmann, H. (1915). „Zur Erinnerung an H. Burkhardt“. *Jahresbericht DMV* 15: 185–95.

23 [UAG] Kur. 6238 (Personalakte Burkhardt). – Burkhardt führte Arbeiten Kleins zum Thema wesentlich fort, erbrachte Beweise für Kleins postulierte Eigenschaften der Sigmafunktionen. Burkhardt, H. (1888). „Beiträge zur Theorie der hyperelliptischen Sigmafunktionen“. *Math. Ann.* 32: 381–442; Burkhardt, H. (1889). „Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen I. Ordnung (Nach Volesungen von F. Klein)“. *Math. Ann.* 35 (2): 198–296. Fußnote Kleins (S. 199), Burkhardt habe manches, was er selbst in seiner Vorlesung (1887/88) nur angedeutet hatte, tiefer ergründet und selbständig dargelegt.

24 Ritters Dissertation „Die eindeutigen automorphen Formen vom Geschlechte Null, eine Revision und Erweiterung der Poincaré’schen Sätze“. *Math. Ann.* 41 (1893) pp. 1–82.

25 Ritter, E. (1894). „Die multiplicativen Formen auf algebraischen Gebilden beliebigen Geschlechtes mit Anwendung auf die Theorie der automorphen Formen“. *Math. Ann.* 44: 261–374; „Die Stetigkeit der automorphen Functionen bei stetiger Abänderung des Fundamentalbereiches“. *Ebd.* 45: 473–544; 46 (95): 200–48.

26 Tanner war seit 1894/95 im Amtlichen Verzeichnis der Studenten an der Universität Göttingen eingetragen, nahm 1895, 1895/96 und 1896 an Lehrveranstaltungen von Klein teil. Es bleibt unklar, ob Ritter die Überfahrt nach Amerika ohne seine Begleitung bewältigen musste. Vgl. auch Snyder, Virgil (1940). „John Henry Tanner – in Memoriam.“ *Bulletin of the American Mathematical Society* (New Series) 46 (5): 374.

Kein Zweifel, dass vermöge seiner überaus zuverlässigen Darstellung die allgemeine Theorie der auf einer Riemann'schen Fläche existirenden Functionen eine bleibende Förderung erfahren hat. Ich nenne hier nur den durchgängigen Gebrauch der homogenen Variablen, die multiplicativen Formen, die Stetigkeit der Functionen bei stetiger Abänderung der Riemann'schen Fläche, und aus seiner noch ungedruckten Arbeit die allgemeinen Sätze über die zu einer Riemann'schen Fläche gehörigen linearen Differentialgleichungen.²⁷

Ritters Ergebnisse flossen in FRICKE/KLEIN (1897, 1912) ein.

Klein veranlasste 1894 auch *Georg Bohlmann* (1869-1928) zur Habilitation in Göttingen. Klein estimierte Bohlmanns Anknüpfen an Lies Gruppentheorie,²⁸ förderte dessen Arbeiten und lenkte ihn in das in Göttingen neu etablierte Gebiet Versicherungsmathematik, wo Bohlmann herausragende Ergebnisse zur axiomatischen Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie erzielte.²⁹ Klein plante weiter mit Bohlmann, erreichte eine n.b.a.o. Professur für ihn, aber Bohlmann wählte die sichere Position in einer Versicherungsgesellschaft.

Als nächster Habilitationskandidat folgte im März 1895 *Arnold Sommerfeld* (1868-1951), wiederum ein wissenschaftlicher Felix-Klein Enkel. Er hatte 1891 bei Lindemann in Königsberg promoviert und fand durch Klein ein geeignetes Habilitationsgebiet (die mathematische Theorie der Diffraktion), wie Sommerfeld begeistert an seine Mutter berichtete. Die Kooperation zwischen Klein und Sommerfeld ist inzwischen hinreichend analysiert worden (vgl. ECKERT 2013; auch TOBIES 2021: 388–90).

Über *Constantin Carathéodory* (1873-1950) ist sehr viel publiziert worden. Akten in Göttingen harren jedoch noch einer exakten Analyse. Carathéodory hatte das Abitur in Brüssel absolviert, ein Ingenieurstudium sowie eine (internationale) Tätigkeit als Bauingenieur abgeschlossen, sich weiter Mathematik im Selbststudium angeeignet und dies ab 1900 mit Studien in Berlin und ab 1902 in Göttingen vertieft.³⁰ Am 23. Juni 1904 reichte er die Arbeit „Untersuchungen aus der Variationsrechnung“ als Dissertationsschrift ein. In der Akte steht: „Kand. wünscht Termin [für die mündliche Prüfung] möglichst bald nach dem 15. Juli. Die Arbeit erhält ein besonderes Prädikat.“³¹ Für das Rigorosum wurde der 13. Juli festgesetzt. Minkowskis Gutachten – auch sprachlich ein Genuss –, verfasst am 25. Juni 1904, lautet:

Die Variationsrechnung, eine der reichsten Adern in den Tiefen der Analysis, ist erst in den der Oberfläche nächstgelegenen Gängen aufgeschlossen. Eine seitliche Verästelung, welche eigenartige Schätze birgt, an denen frühere Sucher vorübertasteten, deckt Carathéodory auf.

Er befreit die Grundaufgabe über das Extremum eines einfachen Integrals von der oft unbrauchbaren Beschränkung auf lösende Curven mit durchweg stetig sich ändernder Fortschreitungsrichtung, Denn unter sehr allgemeinen Umständen kommt ein verlangter extremer Charakter für eine Curve nur so zu Stande, dass dabei die Curve Ecken aufweist.

Mit Gewandtheit handhabt C. die für das Gebiet von Weierstrass geschaffenen Arbeitsmethoden, und zugleich weiss er bei jedem Schritte und in abwechslungsreicher Manier den Resultaten eine anschauliche geometrische Interpretation zu leihen wie überhaupt die Darstellungsweise eine lebendige ist. Das Verständniss der entwickelten Theorien wird verstärkt durch mehrere ausgedehnte Beispiel, die so geschickt gewählt sind, dass sie eine Durchführung und Discussion bis in alle Einzelheiten gestatten und zugleich an sich ein Interesse bieten. Zu bemerken ist noch, dass C. sich den Stoff selbständig gewählt hat.

Die Arbeit gehört zu den besten mathematischen Dissertationen, die in den letzten Jahren der Fakultät eingereicht [worden] sind, und beantrage ich die Zulassung des Kandidaten zur mündlichen Prüfung.

H. Minkowski

27 Klein, F. (1897). „Ernst Ritter †“ (datiert 25.9.1895). *Jahresbericht der DMV* 4: 52–54, Zitat S. 53.

28 Er hatte in Berlin studiert, aber seine Dissertation *Über eine gewisse Klasse kontinuierlicher Gruppen und ihren Zusammenhang mit den Additionstheoremen* (1892) in Halle eingereicht: <https://archive.org/details/bereinegewissek00bohlgoog/page/n5/mode/2up>

29 Kregel, Ullrich (2011). “On the Contributions of Georg Bohlmann to Probability Theory.” *Electronic Journal for History of Probability and Statistics* 7 (1) : 1–13.

30 Zu Carathéodorys Entscheidung, von Berlin nach Göttingen zu wechseln, vgl. Christine Philis's Artikel http://www.24grammata.com/wp-content/uploads/2011/12/Caratheodori-24grammata.com_.pdf

31 Vgl. hier und im Folgenden [UAG] Phil. Fak. 190 b1, Nr. 29.

Carathéodory hatte als Prüfungsfächer gewählt: Hauptfach Mathematik (Minkowski); Angewandte Mathematik (Klein) und Astronomie (Schwarzschild). Alle prüften breit in ihren Gebieten, im Hauptfach eine Stunde, in den Nebenfächern je eine halbe Stunde. Sie kamen zum gemeinsamen Urteil *magna cum laude*. Hier sei mitgeteilt, was Klein – der Carathéodory aus zwei Seminarvorträgen kannte³² – handschriftlich in die Akte eintrug:

Angewandte Mathematik: Kräftepläne und reciproke Polyeder der graphischen Statik. Spannungen in elastischen Systemen. Airy'sche Function. – Centralprojection als Collineationen von verschwindender Determinante. Elemente der Photogrammetrie. – Pothenot'sches Problem. Clairaut'sche Gradmessung. Eratosthenes. – Methode der kleinsten Quadrate. Gauß' Fehlergesetz. Der Candidat hat vielseitige und zuverlässige Kenntnisse.

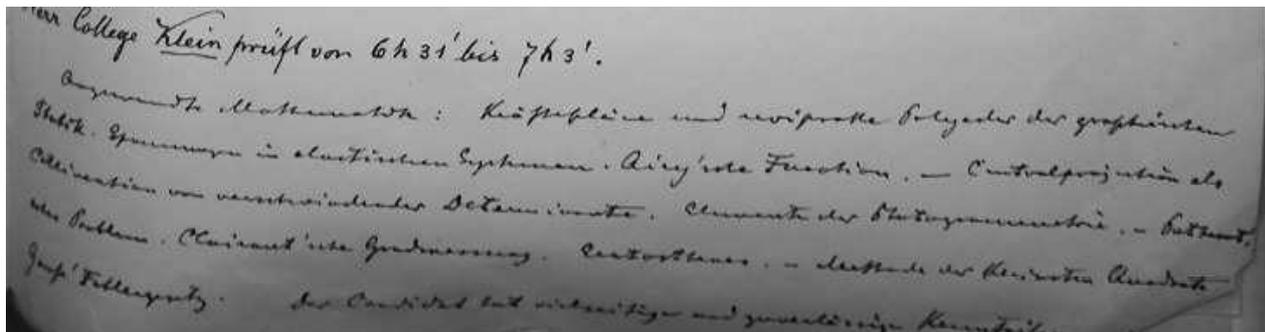


Abb.: Kleins handschriftlicher Eintrag der Prüfungsgegenstände bei Carathéodorys Rigorosum

Es war Felix Klein, der Carathéodory sofort aufforderte, sich in Göttingen zu habilitieren. So reichte Carathéodory bereits am 26. Januar 1905 sein Gesuch zur Habilitation ein, was die Mathematiker gegen philologische Bedenken (aufgrund der kurzen Frist) durchsetzten.³³ Es wurde eine Habilkommission gebildet, bestehend aus (in alphabetischer Reihenfolge in der Akte): Hilbert, Minkowski, Klein, Runge, Schwarzschild, Voigt, Wiechert. Das Verfassen des Gutachtens zur Habilschrift *Über die starken maxima und minima bei einfachen Integralen* wurde Hilbert übertragen. Er schrieb u.a.: „Es gelingt nun [...] dem Candidaten, mit einer alle Erwartung übertreffenden Vollständigkeit, die Frage nach den Kurven, für die ein einfaches Integral den absolut grössten oder kleinsten Wert annimmt, zu beantworten [...]. Die Arbeit [...] repräsentiert [...] den wichtigsten Fortschritt, der in der besonderen Theorie der Maxima und Minima einfacher Integrale seit Weierstrass gemacht worden ist. Die Persönlichkeit des Kandidaten ist die eines ausgereiften und durchgebildeten Mathematikers, der die moderne Analysis beherrscht und die vielseitigen Verzweigungen und Anwendungen der funktionentheoretischen Disciplinen aufs gründlichste kennt.“ Es folgen Urteile von Minkowski, Klein, und der weiteren Kommissionsmitglieder. Klein trug in die Akte ein:

Auch ich kenne Hrn. Carathéodory als einen Mann von vielen Kenntnissen und gereiftem mathematischen Urteil. Was die von ihm eingereichten Arbeiten angeht, so hebe ich in Ergänzung der vorstehenden Voten gern noch hervor, dass die in den math. Annalen abgedruckte Notiz³⁴ den Verfasser als geschickten Geometer erkennen lässt. Für Zulassung zum Colloquium. 10. Febr. 05 Klein

Im Colloquium am 27. Februar 1905 prüften Hilbert, Minkowski und Klein. Der Probevortrag über „Länge und Oberfläche“ folgte am 4. März 1905, womit ihm die *venia legendi* für Mathematik erteilt wurde. Diese Urteile bildeten die Basis, dass Carathéodory einstimmig als

32 Vorträge am 23.7.1902 und am 18.5.1904, vgl. <https://firsching.ch/klein/#id-844>; <https://firsching.ch/klein/#id-912>

33 Vgl. hier und im Folgenden [UAG] Phil. Fak. 190a, V, 31–43.

34 Damit meinte Klein die Arbeit: Carathéodory, C. (1904). „Zur geometrischen Deutung der Charakteristiken einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei Veränderlichen“. *Math. Ann.* 59: 377–82 (datiert Febr. 1904). [UAG] Phil. Fak. Kur 6275. Bl. 8.

Nachfolger Kleins bestimmt wurde (vgl. TOBIES 2021: 522–23). Der Minister ernannte ihn zum 1. April 1913 mit Jahresgehalt von 7.200 Mark plus 720 Mark Wohnungsgeldzuschuss.

Paul Koebe (1882-1945) erzielte Ergebnisse in Kleins wichtigstem Gebiet. Er hatte seine Grundausbildung – wie Carathéodory – bei H.A. Schwarz in Berlin erworben und auch bei diesem promoviert, kam aber danach nach Göttingen, wo er, angeregt durch Klein, sich mit dem Thema *Die Uniformisierung algebraischer Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe* (1907) habilitierte und zu weiteren Arbeiten (insbes. maßgeblichen Beweisen der Uniformisierungstheoreme) inspiriert wurde (vgl. TOBIES 2021a). Koebes Forschungsfeld blieb auf dieses Gebiet beschränkt; auch seine Persönlichkeit war weniger ausgereift, sodass er als Kleins Nachfolger unberücksichtigt blieb.

Mit *Conrad Heinrich Müller* (1878-1953) und *Rudolf Schimmack* (1881-1912) etablierte Klein Geschichte der Mathematik (1908) und Didaktik der mathematischen Wissenschaften (1911) als neue Habilitationsgebiete in Göttingen (vgl. bes. TOBIES 2019: 411–13; 433–35).

Auch *Theodor* [Theodore von] *Kármán* (1881-1963) erfuhr durch Klein eine besondere Förderung. Er hatte 1902 ein Maschineningenieurdiplom an der Technischen Hochschule Budapest erworben, der berühmten Josephs-Universität der technischen Wissenschaften, bekannt durch ihre führende Rolle in der Mathematik und die Bezeichnung „das Göttingen der [österreich-ungarischen] Monarchie“. Kármáns Hochschullehrer waren u.a. Julius [Gyula] König (1849-1913), mit dem Klein seit 1873 in gutem Kontakt stand, und Gusztáv Rados (Rausnitz) (1862-1942), der zwei Semester bei Klein in Leipzig studiert hatte. Nach dem Studium war Kármán ein und ein halbes Jahr im Konstruktionsbüro einer Maschinenfabrik (Cranz & Co.) und drei Jahre als Assistent an der Budapester TH tätig. In Göttingen wollte er seine Studien in theoretischer Richtung ergänzen, besuchte Veranstaltungen von Abraham, Carathéodory, Hilbert, Klein, Prandtl, Runge und Voigt – wie er in seiner Vita zur Dissertation angab.³⁵ Er kam im Herbst 1906, verbrachte ein Semester an der Versuchsanstalt der TH Charlottenburg und reichte am 12. Juli 1908 sein Gesuch zur Promotion in Göttingen ein.

Seine Dissertationsschrift „Untersuchungen über die Knickfestigkeit gerader Stäbe“ beurteilte Ludwig Prandtl mit Bestnote „Opus eximium“.³⁶ Das Doktorexamen fand am Mittwoch, den 28.10.1908, von 18.00 bis 20.00 Uhr statt. Prandtl prüfte eine Stunde im Hauptfach Angewandte Physik; Klein (Mathematik) und Woldemar Voigt (Physik) hatten für die Nebenfächer je eine halbe Stunde. Das Gesamturteil des Examens lautete *magna cum laude*. Klein trug folgende Prüfungsgegenstände in die Akte ein:

Partielle Differentialgleichungen vom elliptischen und hyperelliptischen Typus. Rolle der Charakteristiken im letzteren Falle. Analytischer Charakter der Lösungen, je nach der Art der Randwerte.

Arten der Flächen 2. Grades. Kreisschnitte eines Ellipsoids, allgemeine Schnitte mit parallelen Ebenen.

Grundeigenschaften der Zentralprojektion. Das anharmonische Verhältnis von 4 Punkten.

Der Fundamentalsatz der Algebra und sein Beweis.

Der Kand. hat gute mathematische Auffassung, aber nicht überall präzise mathematische Kenntnisse.“

Die Habilitation sollte ein Jahr später erfolgen. Klein kannte Kármán näher, denn dieser hatte sich seit WS 1906/07 in seine Vorlesungen eingeschrieben und einen Vortrag über „Unstetige Potentialbewegungen“ im Seminar zur Hydrodynamik 1907/08 gehalten,³⁷ das Klein gemeinsam mit Runge, Prandtl und Wiechert leitete.³⁸ Im Sommer 1909 beteiligte sich Kármán am Seminar, in dem Klein „weitere Fragen der Festigkeitslehre unter besonderer Berücksichtigung der experimentellen Grundlagen“ zu behandeln gedachte (das Seminar war wiederum gemeinsam mit Prandtl und Runge angekündigt).³⁹ Kármáns Beitrag (27. Juni 1909) lautete

35 [UAG] Phil. Fak. 141, Nr. 15 (Prom.-Akte Th. Kármán).

36 [UAG] Phil. Fak. 141, Nr. 15 (Prom.-Akte Th. Kármán).

37 [Protokolle] Bd. 27: 11–17 (Vortrag Kármáns am 27.11.1907).

38 Vgl. Zur Analyse des Seminars ECKERT 2019.

39 [Protokolle] Bd. 27: 296 (Kleins einführende Disposition am 5. Mai 1909)

„Bemerkungen über den Begriff der Deformationsarbeit und die Anwendung des Castiglians'schen Principis für Temperaturänderungen“.⁴⁰

Prandtl beantragte im Juli 1909 eine Assistentenstelle für Kármán, der sich für Mechanik und Wärmelehre habilitieren konnte. Die Habilitationsschrift lautete *Untersuchungen über die Bedingungen des Bruches und der plastischen Deformation, insbesondere bei quasi-isotropen Körpern* (Göttingen 1910).

Kármán setzte die in Kleins Seminaren angeregten Forschungen fort, wobei seine durch Klein inspirierten Ergebnisse hervorgehoben seien, die zur *Kármánschen Wirbelstraße* führten. Klein hatte in seiner Hydrodynamischen Vorlesung 1899/1900, die ausgearbeitet im Lesezimmer zur Verfügung stand, und in Seminaren grundlegende Themen anschaulich behandelt, auf die wichtigste Literatur verwiesen und Forschungsfragen aufgeworfen. Dazu gehörte auch das Thema „Wirbel und Wirbelkörper“, wozu Klein am 6. November 1907 eingangs in seinem Seminar sprach und ins Protokollbuch eintrug:

4. Wirbel und Wirbelkörper (siehe Maxwell, sowie Riecke in den Göttinger Nachrichten von 1888). Schilderung der Wirbelkörper (d.h. der mitgeführten, um die Wirbelfäden zirkulierenden Wassermassen) im Falle zweier paralleler geradliniger entgegengesetzter Wirbelfäden und im Falle von Helmholtzzwiebeln verschiedene Querschnitte. Wie weit sind diese spezifischen Beispiele für die bei beliebigen Wirbeln stattfindenden Verhältnisse demonstrativ? Klein.⁴¹

Am 20. August 1909 notierte Klein im Urlaub auf Langeroog selbst noch eine kleine Arbeit zum Thema „Über die Bildung von Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten“.⁴² Als Kármán die entscheidenden Resultate erzielte, d.h. die regelmäßige Anordnung von alternierenden Wirbelfäden hinter einem Hindernis berechnete, reichte Klein dessen Arbeit am 14. September 1911 bei der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften ein.⁴³ Kármáns Form der Wirbelanordnung ging als *Kármánsche Wirbelstraße* in die Geschichte ein. Klein prophezeite dem Ungarn, dass ihm die nächste Professur im Gebiet gewiss wäre; bereits 1912 erhielt er einen Ruf an die TH Aachen (vgl. TOBIES 2019: 404), und emigrierte schließlich in die USA.

Die Reihe der von Klein bis zur Habilitation Geförderten ist nicht abgeschlossen. Hier sei noch *Emmy Noether* (1882-1935) besonders hervorgehoben, die in engem Austausch mit Klein zur Arbeit „Invariante Variationsprobleme“ (Juli 1918) gelangte. Diese Arbeit, welche die für die Physik wichtigen Noether-Theoreme enthält, widmete die Klein zum 50-jährigen Doktorjubiläum.⁴⁴ Diese Schrift wurde ihre Habilitationsschrift. Nach zwei vergeblichen Anläufen zur Habilitation (1915 und 1917) konnte sie – dank Kleins Anstoß – ihr Habilitationsverfahren im Mai 1919 als erste Mathematikerin deutschlandweit realisieren. Kleins Brief vom 5. Januar 1919 an Ministerialdirektor Otto Naumann (1852-1925) im preußischen Kultusministerium zeugt vom diplomatisch geschicktem Engagement:

Ew. Exzellenz

Erinnern sich ja sicher des s.Z. bei der hiesigen Fakultät eingereichten Gesuches der Frl. Noether, sich für Mathematik habilitieren zu dürfen. Von den Vertretern der Math.[ematik] lebhaft befürwortet, wurde dieses Gesuch s.Z. aus allgemeinen Gründen abgewiesen, aber ein Modus vivendi gestattet, durch den Frl. Noether immerhin eine gewisse Wirksamkeit ermöglicht ist. Ich verstand damals die so umschriebene Entscheidung des Ministeriums natürlich sehr wohl, aber möchte fragen, ob diese auch fernerhin auf alle Fälle aufrecht erhalten werden soll. Wenn nicht, so möchte ich die hiesige Fakultät veranlassen, sich erneut mit der Angelegenheit zu beschäftigen.

40 Ebd. Bd. 27: 333–37 (Kármáns Vortrag, den Klein mit „Ausführungen [zur Deformationsarbeit bei Temperaturänderungen] vom Standpunkte der Thermodynamik aus“ bezeichnete, S. 388)

41 [Protokolle] Bd. 27: 5–6 (F. Klein).

42 Publiziert in *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 58 (1910), KLEIN 1922 (GMA Bd. II): 710–13.

43 Kármán, Th.v. (1911). „Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt“. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-physikalische Klasse* 1911: 509–17.

44 Vgl. TOBIES 2004; TOLLIEN 2023 dokumentiert die Kooperation zwischen Klein und E.Noether minutiös.

Bei den heutigen Zeitumständen kann es in der Tat nicht fehlen, dass die jetzige Stellung von Frl. Noether von vielen Seiten als eine unbillige Einengung empfunden wird, zumal die wiss.[enschaftliche] Leistung von Frl. Noether alle von uns gehegte Voraussicht weit übersteigt. Sie hat im letzten Jahre eine Reihe theoretischer Untersuchungen abgeschlossen, die oberhalb aller im Zeitraum von Anderen hierorts realisierten Leistungen liegen (die Arbeiten der Ordinarien mit eingeschlossen), sie hat auch auf die Zusammenarbeit der gleichstrebenden Mathematiker durch Besprechungen und Vorträge in der math.[ematischen] Ges.[ellschaft] den günstigsten Einfluß geübt. Die Voraussetzungen für eine Ausnahmebehandlung des Falles sind also in vollstem Maasse gegeben. Aber vielleicht ist es nach der inzwischen eingetretenen Zulassung von Frauen zu den verschiedensten Staatsämtern überhaupt jetzt nicht mehr nötig, auf Ausnahmeleistung zu argumentieren.

Eine ganz kurze Antwort ist Alles, was ich hier erbitte.

Ew. Exzellenz

ganz erbenster

Kln⁴⁵

Kultusminister Konrad Haenisch (1876-1925) informierte den Göttinger Universitätskurator am 8. Mai 1919, dass gegen Emmy Noethers Habilitation keine Einwände erhoben werden und verfügte am 21. Februar 1920 generell, „[...] dass in der Zugehörigkeit zum weiblichen Geschlecht kein Hindernis gegen die Habilitation erblickt werden darf [...]“.⁴⁶

Wir finden auch in diesem Kontext bestätigt, dass Klein mathematisch begabte Personen unabhängig von Geschlecht, Nationalität und Religionszugehörigkeit förderte. Als der ungarisch-amerikanische Physiker Eugene P. Wigner (1902-1995), Nobelpreis 1962, in einem Einstein gewidmeten Vortrag von 1949 das Thema Invarianz und Physik behandelte, verwies er auf *Kleins Schule* in diesem Kontext,⁴⁷ übersah aber noch Emmy Noethers Ergebnisse.⁴⁸

Im Unterschied zu Physikern, die Emmy Noethers Arbeit lange Zeit ignorierten bzw. nicht verstanden, setzte Felix Klein noch wenige Wochen vor seinem Tode, am 13. April 1925, Emmy Noethers herausragenden Beitrag in einem Brief an Max Planck in das Licht:

Wenn ich die Sache richtig beurteile, besteht zwischen Ihnen und mir jetzt Übereinstimmung, aber nicht mit Kollegen von Laue. Ganz klar ist das Sachverhältnis bei Fraulein Noether in den Göttinger Nachrichten von 1918 auseinander gesetzt [...] Da steht S. 255 unter Angabe klarer mathematischer Gründe, warum in der speziellen Relativitätstheorie eigentliche Erhaltungssätze gelten, in der allgemeinen Relativitätstheorie aber nicht. Leider ist die Arbeit von Fraulein Noether sehr knapp geschrieben und auch noch durch die Allgemeinheit der Darstellung in ihrer Tragweite schwer aufzufassen. Damit mag zusammenhängen, das die Physiker die Arbeit nicht gelesen haben. – Übrigens ist Kollege von Laue dem Sachverhalt auf S. 175-177 des Bandes II seiner Relativitätstheorie von 1921 ganz nahe; er unterbricht nur die konklusive mathematische Entwicklung durch ein Beispiel, in welchem er Vorstellungen der traditionellen Physik heranzieht. Ob man die allgemeine Relativitätstheorie annehmen will oder nicht, ist eine Frage für sich, hinsichtlich derer ich keine feste Meinung zu vertreten habe. Wenn man sie aber annimmt, ist die mathematische Entwicklung zwangsläufig; nur in diesem Sinne bin ich „Purist“.⁴⁹

45 Zuerst zitiert in TOBIES 1991/92: 172 (Anhang Nr. 13); vgl. auch TOBIES 2019: 461.

46 TOBIES 1991/92: 160.

47 “Let me first stress the points of similarity between the role of invariance in classical and quantum theories. The principles of invariance have a dual function in both theories. On the one hand, they give a necessary condition which all fundamental equations must satisfy: the irrelevant initial conditions must not enter in a relevant fashion into the results of the theory. Second, once the fundamental equations are given, the principles of invariance furnish, in the form of conservation laws for linear momentum and energy, for angular momentum and the motion of the center of mass, can be derived both in classical theory and in quantum mechanics from the invariance of the equations with respect to infinitesimal displacements and rotations in space-time.” Dazu merkte Wigner an: “In classical theory, this observation is due to F. Klein’s school. Cf. also F. Engel, ‘Über die zehn allgemeinen Integrale der klassischen Mechanik,’ *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen*, p. 270 (1916); also G. Hamel, ‘Die Langrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik,’ *Z.Math. Phys.*, 50, 1 (1904), and E. Bessel-Hagen, ‘Über die Erhaltungssätze der Elektrodynamik,’ *Math. Ann.*, 84, 258 (1921).” (WIGNER 1995: 287–88; Anmerkung p. 288).

48 Darauf verwies dezidiert Cordula Tollmien, die die Quellen detailliert analysierte, TOLLMIEN 2023: 468–69.

49 Klein an Max Planck, Brief v. 13.4.1925 (in der Handschrift seiner Tochter Elisabeth Staiger, geb. Klein). Die Autorin dankt Dieter Hoffmann (Berlin) für die Quelle, publiziert (in engl. Übers.) in TOBIES 2021:541.

Bibliographie

- [UAG] Universitätsarchiv Göttingen, Philosophische Fakultät. Berufungs-, Promotions-, Habilitationsakten.
- [UBG] Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Cod. Ms. F. Klein (Nachlass Felix Kleins).
- CONFALONIERI, Sara; SCHMIDT, Peter-Maximilian; VOLKERT, Klaus eds. (2019). *Der Briefwechsel von Wilhelm Fiedler mit Alfred Clebsch, Felix Klein und italienischen Mathematikern* (Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik, 12, hg. v. Ralf Krömer und Gregor Nickel). Siegen: Universitätsverlag.
- ECKERT, Michael (2013). *Arnold Sommerfeld: Science, Life and Turbulent Times 1868–1951*. Berlin: Springer (German original: Göttingen: Wallstein, 2013).
- (2019). *Strömungsmechanik zwischen Mathematik und Ingenieurwissenschaft: Felix Kleins Hydrodynamik-seminar 1907–08*. Hamburg: University Press.
- FREI, Günther (1985). *Der Briefwechsel David Hilbert – Felix Klein (1886–1918)*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- FRICKE/KLEIN (1897). Fricke, Robert; Klein, Felix. *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen*. Vol. I: *Die Gruppentheoretischen Grundlagen*. Leipzig: B.G. Teubner. Trans. Arthur M. DuPre, *Lectures on the Theory of Automorphic Functions* (Classical Topics in Mathematics, 3). Beijing: Higher Education Press, 2017.
- FRICKE/KLEIN (1912). Fricke, Robert; Klein, Felix. *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen*. Vol. II: *Die functionentheoretischen Ausführungen und die Anwendungen*. Leipzig: B.G. Teubner. Trans. A.M. DuPre, *Lectures on the Theory of Automorphic Functions* (Classical Topics in Mathematics, 4). Beijing: Higher Education Press, 2017.
- KLEIN, Felix (1921/1922/1923). *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Bd. I, II, III (GMA I, II, III). Berlin: Julius Springer.
- TOBIES, Renate (1987). „Zur Berufungspolitik Felix Kleins“. *NTM-Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin* 24 (2): 43–52.
- (1991/92). „Zum Beginn des mathematischen Frauenstudiums in Preußen“. *NTM-Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin* 28 (2): 151–72.
- (2004). „Die Noether-Theoreme“. In Tyradellis, D.; Friedlander, M.S. eds., *10 + 5 = Gott: Die Macht der Zeichen* (Jüdisches Museum Berlin). Köln: 283–84.
- (2019). *Felix Klein: Visionen für Mathematik, Anwendungen und Unterricht*. Berlin: Springer Spektrum.
- (2021). *Felix Klein: Visions for Mathematics, Applications, and Education*. Cham: Birkhäuser.
- (2021a). „Felix Klein und Paul Koebe: Durchführung eines im Grunde doch Kleinen Programms.“ In Fischer, H.; Sauer, T.; Weiss, Y. eds., *Exkursionen in die Geschichte der Mathematik und ihres Unterrichts*. Münster: WTM-Verlag: 274–91.
- (2023). *Felix Klein und Georg Pick. Mathematische Talente fordern und fördern*. SpringerSpektrum: Berlin
- TOBIES, Renate, ROWE, David E. (Hg.) (1990). *Korrespondenz Felix Klein – Adolph Mayer. Auswahl aus den Jahren 1871 – 1907*. Leipzig: B.G. Teubner.
- TOLLMEN, Cordula (2021, 2023). *Die Lebens- und Familiengeschichte der Mathematikerin Emmy Noether in Einzelaspekten* 2, 3. Ahrensburg: tredition.
- VOSS, Aurel (1919). „Felix Klein als junger Doktor“. *Die Naturwissenschaften* 7: 280–87.